

Représentation non locale d'un milieu hétérogène en diffusion pure

Christian Moyne*, Alain Degiovanni

Laboratoire d'énergie et de mécanique théorique et appliquée, UMR 7563 CNRS – INPL – UHP, 2, av. de la Forêt de Haye, B.P. 160, 54504 Vandœuvre-lès-Nancy cedex, France

Reçu le 2 juillet 2002 ; accepté le 23 décembre 2002

Résumé

Pour un transfert diffusif monodimensionnel au travers d'un milieu hétérogène spatialement périodique, la méthode des quadripôles thermiques permet d'obtenir exactement l'équation non-locale en temps à laquelle obéit le transfert. Le cas des milieux symétriques (pour lesquels l'entrée et la sortie peuvent être permutés) et non-symétriques est analysé séparément. Quelques exemples d'applications pour des milieux dit dégénérés (constitués de résistances ou capacités pures) ou réels sont analysés. L'équation obtenue ne se réduit pas à l'équation hyperbolique de Cattaneo–Vernotte qui se révèle inadéquate pour décrire les transferts diffusifs au travers de milieux hétérogènes.

© 2003 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

For a one-dimensional diffusive transfer through a spatially periodic heterogeneous medium, the quadrupoles method allows to obtain the exact non-local (in time) equation describing the transfer. The case of reversible (that is to say when input and output can be permuted) and non-reversible media is examined separately. Some examples are treated for illustration: degenerated media (made of pure resistances or capacitances) or real media. The obtained equation cannot be reduced to the hyperbolic Cattaneo–Vernotte equation, which is unable to describe diffusive transfer through heterogeneous media.

© 2003 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Quadripôles ; Équation non-locale

Keywords : Diffusion; Non-Fourier

1. Introduction

Les situations pour lesquelles le modèle classique de transfert thermique (ou massique) par diffusion écrit sous la forme de l'équation parabolique de la chaleur doit être remis en cause suscitent toujours un grand intérêt. Vernotte [1] et Cattaneo [2] ont proposé pour résoudre le paradoxe d'une vitesse de propagation infinie un modèle de conduction hyperbolique aux temps courts qui se réduit à la forme parabolique ordinaire aux temps longs. La microthermique s'intéresse tout particulièrement à l'étude du transfert thermique très rapide sur de très courtes dimensions spatiales et a montré que l'analyse de Cattaneo ou Vernotte ne permet

qu'une description très imparfaite des résultats de simulation numérique obtenus par dynamique moléculaire [3].

Notre propos ici est tout autre. Nous recherchons une alternative pour décrire de façon exacte le transfert diffusif au travers d'un milieu hétérogène monodimensionnel spatialement périodique en renonçant au modèle classique de Fourier et en représentant ce milieu hétérogène par un milieu homogène équivalent ne vérifiant plus la loi de Fourier. Une telle situation peut se rencontrer dans de nombreuses situations pratiques aussi bien en transfert de chaleur que de masse. Ce problème est plutôt d'intérêt théorique en matière de transfert thermique où les milieux sont généralement rapidement *homogénéisables*, c'est-à-dire peuvent être remplacés par un milieu *homogène* équivalent satisfaisant à la loi de Fourier [4]. Ceci n'est pas nécessairement le cas dans de nombreux problèmes de diffusion de masse du fait d'un contraste de propriétés thermophysiques généralement plus grand [5,6].

L'application sera faite sur un cas simple permettant de mener les calculs de façon exacte ; on a choisi celui

* Auteur correspondant.

Adresses e-mail : christian.moyne@ensem.inpl-nancy.fr (C. Moyne), alain.degiovanni@ensem.inpl-nancy.fr (A. Degiovanni).

Nomenclature

a	diffusivité thermique	$m^2 \cdot s^{-1}$
A, B, C, D	coefficients des matrices de transfert	
c	vitesse de propagation	$m \cdot s^{-1}$
C_t	capacité thermique	$J \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$
e	épaisseur	m
E, F, G, H	coefficients des matrices de transfert	
\mathcal{K}	fonction liée à une pseudo-vitesse de conduction	$J \cdot m^2 \cdot s^{-1} \cdot K^{-1}$
\mathcal{E}	énergie volumique	$J \cdot m^{-3}$
ℓ	longueur de la cellule unité	m
n	nombre de cellules unités	
R_t	résistance thermique	$K \cdot m^2 \cdot W^{-1}$
p	variable de Laplace	s^{-1}
t	temps	s

T	température	K
x	coordonnée d'espace	m

Greek symbols

α	constante de temps	s
λ	conductivité thermique	$W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
ρc	chaleur volumique	$J \cdot m^{-3} \cdot K^{-1}$
φ	densité de flux de chaleur	$W \cdot m^{-2}$
τ	variable temporelle	s
τ_c	temps caractéristique	s

Subscripts, superscripts and other symbols

\mathcal{L}	transformation de Laplace
$-$	variable dans l'espace de Laplace

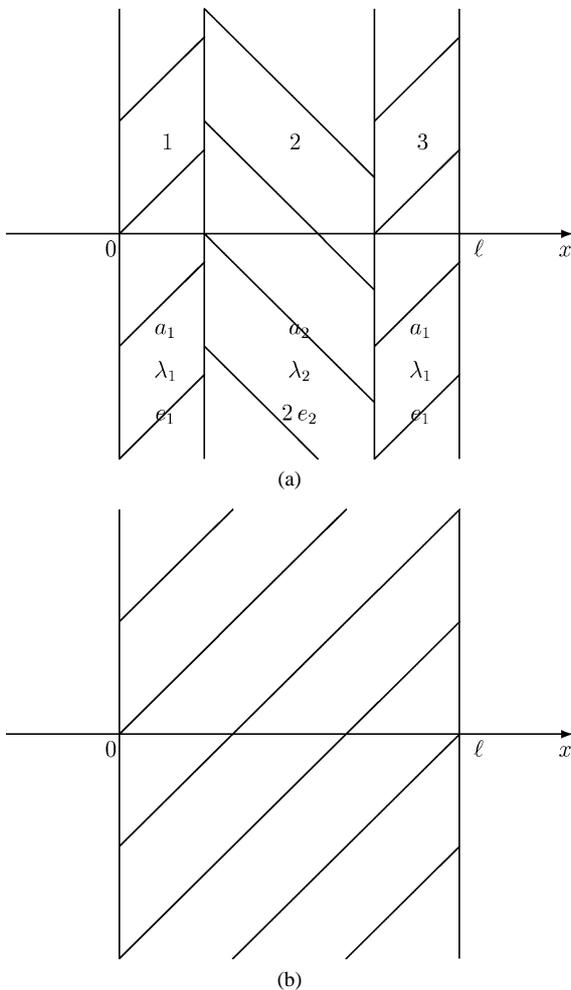


Fig. 1. Cellule-unité (a) et milieu équivalent (b).

du multicouche en transfert unidirectionnel (Fig. 1). Le problème peut se poser de la façon suivante : quelle est l'équation et la loi de comportement qui dans le domaine $[0, \ell]$ conservent les relations entrée-sortie, c'est-à-dire les

relations entre température et flux en entrée du domaine ($x = 0$) et température et flux en sortie du domaine ($x = \ell$) ? L'équation est non locale (en temps) car la densité de flux de chaleur en un point du milieu ne va plus dépendre seulement des grandeurs instantanées locales du champ de température mais de l'histoire thermique du milieu au point considéré. Signalons que dans le cas de milieux poreux, une représentation non locale approchée des lois de transfert a été démontrée par divers auteurs, par exemple [7,8].

Cette approche a un autre but : justifier ou réfuter le terme de propagation que certains auteurs [9] ajoutent à l'équation de la chaleur pour interpréter des expériences sur des milieux hétérogènes.

Une première difficulté apparaît : le milieu homogène en diffusion pure est *symétrique*, c'est-à-dire que l'on peut permuter l'entrée et la sortie du système sans modifier, à cette inversion près, les résultats. Aussi nous allons envisager tout d'abord le cas d'un multicouche *symétrique*, puis nous généraliserons le résultat aux systèmes *non symétriques*.

2. Écriture du multicouche : cas du tricouche symétrique

Considérons un milieu tricouche symétrique ($0 < x < \ell$) composé de deux couches identiques d'épaisseur e_1 d'un milieu 1 ($0 < x < e_1$ et $e_1 + 2e_2 < x < 2(e_1 + e_2)$) et d'une couche d'épaisseur $2e_2$ d'un milieu 2 ($e_1 < x < e_1 + 2e_2$). Le milieu est supposé être à l'équilibre thermique à température nulle à l'instant $t = 0$. Le problème s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = \frac{1}{a_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} & 0 < x < e_1 \\ \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} = \frac{1}{a_2} \frac{\partial T_2}{\partial t} & e_1 < x < e_1 + 2e_2 \\ \frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2} = \frac{1}{a_1} \frac{\partial T_3}{\partial t} & e_1 + 2e_2 < x < 2(e_1 + e_2) \end{cases} \quad (1)$$

avec

$$\begin{cases} T_1 = T_2 \\ \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \end{cases} \text{ en } x = e_1$$

et

$$\begin{cases} T_2 = T_3 \\ \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = \lambda_1 \frac{\partial T_3}{\partial x} \end{cases} \text{ en } x = e_1 + 2e_2$$

A la température T on associe la densité de flux $\varphi = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$. \bar{T} et $\bar{\varphi}$ désignant les transformées de Laplace en temps de T et de φ , la solution de ce problème est élémentaire et la représentation en matrice de transfert nous donne [10,11] :

$$\begin{pmatrix} \bar{T}_{x=0} \\ \bar{\varphi}_{x=0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{T}_{x=\ell} \\ \bar{\varphi}_{x=\ell} \end{pmatrix}$$

$A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2$ sont donnés en Annexe A.

La matrice de transfert du système est donc :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

avec A, B, C, D donnés en Annexe A.

3. Approche non locale

Il s'agit de trouver une équation de la chaleur pour le milieu homogène correspondant à la matrice de transfert précédente (2).

Une généralisation évidente de l'équation de la chaleur linéaire peut s'écrire (en supposant toujours qu'à $t = 0$, le milieu est à l'équilibre thermique) :

$$\int_0^t \rho c(t - \tau) \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}(\tau) d\tau = \int_0^t \lambda(t - \tau) \frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial t}(\tau) d\tau \quad (3)$$

avec

$$\varphi = - \int_0^t \lambda(t - \tau) \frac{\partial T}{\partial x \partial t}(\tau) d\tau \quad (4)$$

où la chaleur volumique ρc_0 et la conductivité thermique λ_0 sont remplacées par des fonctions du temps $\rho c(t)$ et $\lambda(t)$. On remarquera que cette formulation suppose qu'à l'instant $t = 0$ la densité de flux de chaleur φ est nulle.

La formulation (3), (4) est une extension naturelle de l'équation de la chaleur. En effet, si ρc et λ sont des constantes, comme à l'instant initial le milieu est à l'équilibre thermique, il est immédiat de retrouver le cas classique de l'équation parabolique de la chaleur. Remarquons également que l'hypothèse de l'équilibre thermique initial peut être levée en étendant l'intégration pour $-\infty < \tau < t$. L'interprétation physique de la proposition (3), (4) peut être faite en suivant l'analyse de Sobolev [12]. La loi de conservation (3) n'exprime rien d'autre que la variation temporelle

de l'énergie volumique du milieu, notée \mathcal{E} et qui est égale à l'opposé de la divergence de la densité de flux de chaleur, soit :

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (5)$$

La comparaison de (3) et (5) conduit à définir l'énergie interne du milieu sous la forme

$$\mathcal{E} = \int_0^t \rho c(t - \tau) \frac{\partial T}{\partial t}(\tau) d\tau$$

En utilisant l'écriture (3) et (4), après transformation de Laplace sur le temps on obtient :

$$\bar{\rho c}(p) p^2 \bar{T} = \bar{\lambda}(p) p \frac{d^2 \bar{T}}{dx^2} \quad (6)$$

$$\bar{\varphi} = -\bar{\lambda}(p) p \frac{d\bar{T}}{dx} \quad (7)$$

soit pour (6) :

$$\frac{d^2 \bar{T}}{dx^2} = \frac{p}{\bar{a}} \bar{T} \quad \text{avec } \bar{a} = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\rho c}} \quad (8)$$

dont la solution s'écrit sous forme de matrice de transfert :

$$\begin{pmatrix} \bar{T}_0 \\ \bar{\varphi}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{T}_1 \\ \bar{\varphi}_1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$E = H = \cosh \sqrt{\frac{p\ell^2}{\bar{a}}}$$

$$F = \sinh \sqrt{\frac{p\ell^2}{\bar{a}}} / \left(p \bar{\lambda} \sqrt{\frac{p}{\bar{a}}} \right)$$

$$G = \bar{\lambda} p \sqrt{\frac{p}{\bar{a}}} \sinh \sqrt{\frac{p\ell^2}{\bar{a}}}$$

Il suffit d'identifier chaque terme des matrices de transfert (2) et (9). Le système étant sans source interne, on a :

$$AD - BC = 1 \quad \text{et} \quad EH - FG = 1$$

De plus le multicouche étant symétrique, on a :

$$A = D \quad \text{et} \quad E = H,$$

d'où les deux relations restant à écrire :

$$A = E \quad (10)$$

$$B = F \quad \text{ou} \quad C = G \quad (11)$$

où les inconnues sont $\bar{a}(p)$ et $\bar{\lambda}(p)$.

De façon générale, on obtient :

$$\cosh \sqrt{p\ell^2/\bar{a}} = A \quad (12)$$

$$\frac{\sinh \sqrt{p\ell^2/\bar{a}}}{\bar{\lambda} p \sqrt{p/\bar{a}}} = B \quad (13)$$

D'où l'on déduit

$$\bar{a} = \frac{p\ell^2}{\ln^2(A + \sqrt{A^2 - 1})}$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\sqrt{A^2 - 1} \ell}{pB \ln(A + \sqrt{A^2 - 1})}$$

et par suite

$$\bar{\rho c} = \frac{\sqrt{A^2 - 1} \ln(A + \sqrt{A^2 - 1})}{p^2 B \ell}$$

avec

$$\lambda(t) = \mathcal{L}^{-1}[\bar{\lambda}(p)], \quad \rho c(t) = \mathcal{L}^{-1}[\bar{\rho c}(p)]$$

l'équation non locale étant donnée par le système (3), (4).

4. Multi-matériaux

Que devient le système si on multiplie les couches comme sur le schéma de la Fig. 2? En utilisant les propriétés des quadripôles, il est facile de calculer la matrice de transfert équivalente à l'empilement de n cellules unités (voir Annexe B). On montre alors que les fonctions $\bar{\lambda}(p)$ et $\bar{\rho c}(p)$ sont inchangées.

En effet, si on appelle $\begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix}$ la matrice de transfert de la cellule unité, on obtient, pour l'empilement (d'épaisseur $n\ell$) de n cellules, la matrice :

$$A_n = D_n = \cosh\left[n \ln\left(A_0 + \sqrt{A_0^2 - 1}\right)\right]$$

$$B_n = \sqrt{\frac{B_0}{C_0}} \sinh\left[n \ln\left(A_0 + \sqrt{A_0^2 - 1}\right)\right]$$

$$C_n = \sqrt{\frac{C_0}{B_0}} \sinh\left[n \ln\left(A_0 + \sqrt{A_0^2 - 1}\right)\right]$$

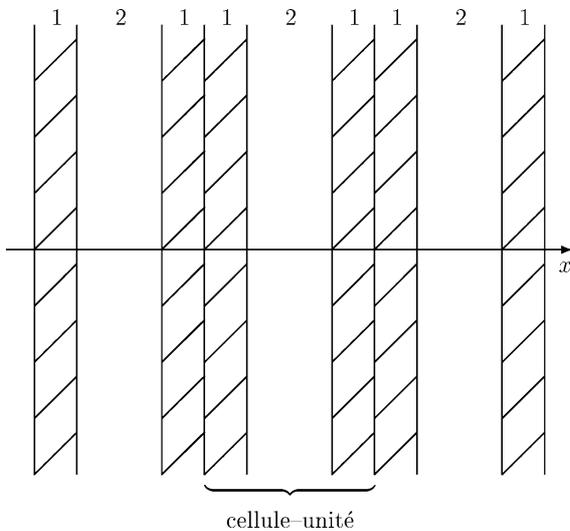


Fig. 2. Exemple de multi-matériau.

D'où (voir (12) et (13))

$$\begin{cases} \cosh \frac{n\ell\sqrt{p}}{\sqrt{\bar{a}}} = A_n \\ \sinh \frac{n\ell\sqrt{p}}{\sqrt{\bar{a}}} / (\bar{\lambda}p\sqrt{\frac{\ell}{\bar{a}}}) = B_n \end{cases}$$

soit $n\ell\sqrt{p}/\sqrt{\bar{a}} = n \ln(A_0 + \sqrt{A_0^2 - 1})$ et par suite

$$\bar{a} = \frac{p\ell^2}{\ln^2(A_0 + \sqrt{A_0^2 - 1})}$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\ell}{p} \sqrt{\frac{\bar{a}}{p}} \sqrt{\frac{C_0}{B_0}} = \frac{\ell}{p} \sqrt{\frac{\bar{a}}{p}} \frac{\sqrt{A_0^2 - 1}}{B_0}$$

$$= \frac{\ell\sqrt{A_0^2 - 1}}{B_0 p \ln(A_0 + \sqrt{A_0^2 - 1})}$$

ce qui est identique à l'empilement d'une cellule, de même pour $\bar{\rho c}$.

Ces fonctions sont donc intrinsèques à l'arrangement des milieux (de façon générale à la structure interne) et indépendantes du nombre de couches.

5. Application à des milieux dégénérés

Avant de donner un exemple sur des milieux réels, nous allons examiner le cas extrême de systèmes tricouches constitués de milieux dégénérés présentant un contraste maximum de diffusivité thermique.

5.1. Calcul exact

Supposons les milieux 1 et 3 constitués d'isolant léger ($a_1 \rightarrow \infty$) caractérisés par une résistance thermique $R_t(e_1/\lambda_1)$ et le milieu 2 constitué au contraire d'un conducteur lourd ($a_1 \rightarrow 0$) caractérisé par une capacité thermique $2C_t(2\rho c_2 e_2)$.

La matrice de transfert du système (2) se simplifie :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & R_t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2C_t p & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & R_t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Les équations (10) et (11) deviennent :

$$\cosh \sqrt{\frac{p\ell^2}{\bar{a}}} = 1 + 2R_t C_t p \quad (15)$$

$$\bar{\lambda} p \sqrt{\frac{p}{\bar{a}}} \sinh \sqrt{\frac{p\ell^2}{\bar{a}}} = 2C_t p \quad (16)$$

L'équation (15) donne :

$$\bar{a} = \frac{p\ell^2}{\ln^2[1 + 2R_t C_t p + \sqrt{(1 + 2R_t C_t p)^2 - 1}]} \quad (17)$$

et l'équation (16) :

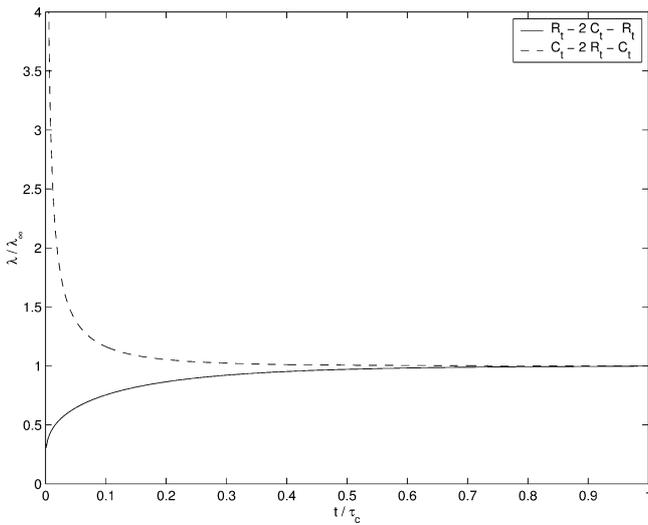


Fig. 3. Conductivité thermique dans le cas d'un milieu tricouche dégénéré.

$$\bar{\lambda} = \frac{2C_t \sqrt{a}}{\sqrt{p} \sinh \sqrt{\frac{p\ell^2}{a}}} \quad (18)$$

$$\bar{\rho c} = \frac{2C_t}{\sqrt{p} \sqrt{a} \sinh \sqrt{\frac{p\ell^2}{a}}} \quad (19)$$

soit en introduisant le temps caractéristique du système $\tau_c = 4R_t C_t = \ell^2/a_0$:

$$\bar{\lambda} = \frac{\ell}{2R_t} \frac{\tau_c}{\sqrt{(1 + \frac{\tau_c}{2} p)^2 - 1} \ln[1 + \frac{\tau_c}{2} p + \sqrt{(1 + \frac{\tau_c}{2} p)^2 - 1}]}$$

$$\bar{\rho c} = \frac{2C_t}{\ell} \frac{\ln[1 + \frac{\tau_c}{2} p + \sqrt{(1 + \frac{\tau_c}{2} p)^2 - 1}]}{p \sqrt{(1 + \frac{\tau_c}{2} p)^2 - 1}}$$

On remarque que lorsque $t \rightarrow \infty$ (soit $p \rightarrow 0$), la limite de $\lambda(t)$ est égale à $1/(2R_t)$ qui est la valeur homogénéisée, ainsi que pour $\rho c(t)$ soit $2C_t/\ell$.

Les Figs. 3 et 4 donnent les variations de $\lambda(t)$ et $\rho c(t)$.

Si maintenant on permute les milieux, 1 et 3 sont des conducteurs lourds de capacité thermique C_t et 2 est un isolant léger de résistance thermique $2R_t$; la matrice devient :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C_t p & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2R_t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C_t p & 1 \end{pmatrix}$$

Soit

$$\cosh \sqrt{\frac{p\ell^2}{a}} = 1 + 2R_t C_t p$$

$$\sinh \sqrt{\frac{p\ell^2}{a}} / \left(\bar{\lambda} p \sqrt{\frac{p}{a}} \right) = 2R_t$$

soit

$$\bar{a} = \frac{p\ell^2}{\ln^2[1 + 2R_t C_t p + \sqrt{(1 + 2R_t C_t p)^2 - 1}]} \quad (20)$$

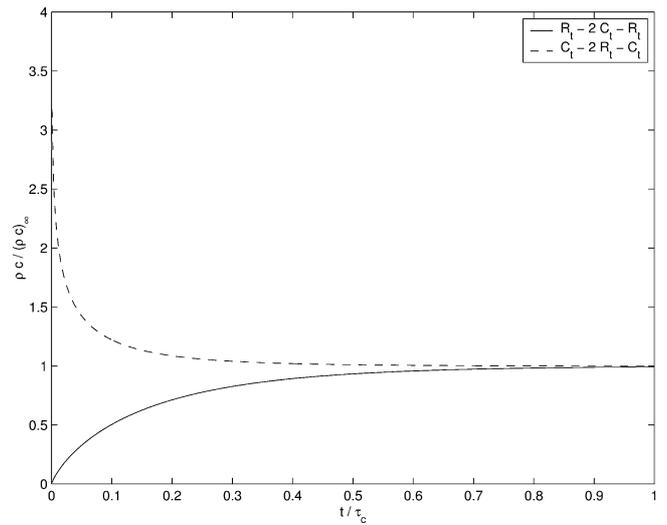


Fig. 4. Chaleur volumique dans le cas d'un milieu tricouche dégénéré.

$$\bar{\lambda} = \frac{\sqrt{a} \sinh \sqrt{\frac{p\ell^2}{a}}}{\sqrt{p} 2R_t p} \quad (21)$$

$$\bar{\rho c} = \frac{\sinh \sqrt{\frac{p\ell^2}{a}}}{\sqrt{p} \sqrt{a} 2R_t p} \quad (22)$$

en introduisant le temps caractéristique τ_c comme précédemment, on obtient :

$$\bar{\lambda} = \frac{\ell}{2R_t} \frac{\sqrt{(1 + \frac{\tau_c}{2} p)^2 - 1}}{p \ln[1 + \frac{\tau_c}{2} p + \sqrt{(1 + \frac{\tau_c}{2} p)^2 - 1}]}$$

$$\bar{\rho c} = \frac{2C_t}{\ell} \frac{\sqrt{(1 + \frac{\tau_c}{2} p)^2 - 1} \ln[1 + \frac{\tau_c}{2} p + \sqrt{(1 + \frac{\tau_c}{2} p)^2 - 1}]}{\tau_c p^2}$$

On remarque que l'expression de \bar{a} est identique dans les deux cas (formules (17) et (20)). Les Figs. 3 et 4 donnent les variations de $\lambda(t)$ et $\rho c(t)$ pour ce cas.

5.2. Approche simplifiée de type Vernotte

On peut se poser la question de savoir s'il existe une relation entre cette représentation non locale (équations (3) et (4)) et la représentation plus classique par une équation hyperbolique introduite par Maxwell [13], Morse et Feshback [14], Vernotte [1] et Cattaneo [2] pour prendre en compte une vitesse de propagation finie de la chaleur. Luitkov a repris cette formulation en 1966 [5] pour expliquer des processus dissipatifs et dispersifs en transfert de masse en particulier. On pourra consulter [15] pour une bibliographie détaillée. Plus récemment, Kaminski [9] a utilisé cette formulation pour représenter la diffusion de chaleur dans des matériaux hétérogènes à l'échelle microscopique mais considérés comme homogènes à l'échelle d'observation. Alors que la loi hyperbolique se propose d'être une modification pour les temps courts de l'équation parabolique de

la chaleur, il s’agirait d’appliquer cette formulation à des fins d’homogénéisation.

Rappelons très brièvement la forme hyperbolique linéaire de l’équation de la chaleur :

$$\rho c_0 \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right) = \lambda_0 \Delta T \tag{23}$$

associée à l’expression de la densité de flux :

$$\varphi + \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\lambda_0 \text{grad } T \tag{24}$$

Si l’on utilise ces équations pour des systèmes hétérogènes, le problème est la signification du paramètre α qui dans la formulation classique de Maxwell ou Vernotte est lié à la vitesse de propagation c de la chaleur par $\alpha = a/c^2$.

Connaissant maintenant une expression de l’équation de la chaleur permettant de représenter la diffusion dans les milieux hétérogènes, rechercher la signification de α revient à comparer le système (3), (4) avec le système (23), (24), le milieu dans les deux cas étant considéré comme homogène à l’échelle de description.

Le système (23), (24) en unidirectionnel et après transformation de Laplace donne :

$$\rho c_0 (p\bar{T} + p^2\alpha\bar{T}) = \lambda_0 \frac{d^2\bar{T}}{dx^2}$$

$$\bar{\varphi} + \alpha p\bar{\varphi} = -\lambda_0 \frac{d\bar{T}}{dx}$$

que l’on peut écrire :

$$\rho c_0 p\bar{T} = \frac{\lambda_0}{1 + \alpha p} \frac{d^2\bar{T}}{dx^2} \tag{25}$$

$$\bar{\varphi} = -\frac{\lambda_0}{1 + \alpha p} \frac{d\bar{T}}{dx} \tag{26}$$

Écriture que l’on peut comparer au système (6) et (7) soit :

$$\bar{\rho c}(p) p^2 \bar{T} = \bar{\lambda}(p) p \frac{d^2\bar{T}}{dx^2}$$

$$\bar{\varphi} = -\bar{\lambda}(p) p \frac{d\bar{T}}{dx}$$

Il apparaît alors que le système (25), (26) fixe les fonctions $\bar{\rho c}(p)$ et $\bar{\lambda}(p)$ sous la forme :

$$\bar{\rho c}(p) = \frac{\rho c_0}{p} \text{ et}$$

$$\bar{\lambda}(p) = \frac{\lambda_0}{p(1 + \alpha p)}$$

On peut remarquer qu’après transformée inverse, ces expressions donnent :

$$\rho c(t) = \rho c_0 \text{ et} \tag{27}$$

$$\lambda(t) = \lambda_0 [1 - \exp(-t/\alpha)] \tag{28}$$

Il est évident que α ne peut être que positif (voir relation (28)), c’est-à-dire que le système (23), (24) ne peut donner que des températures qui varient “moins vite” que

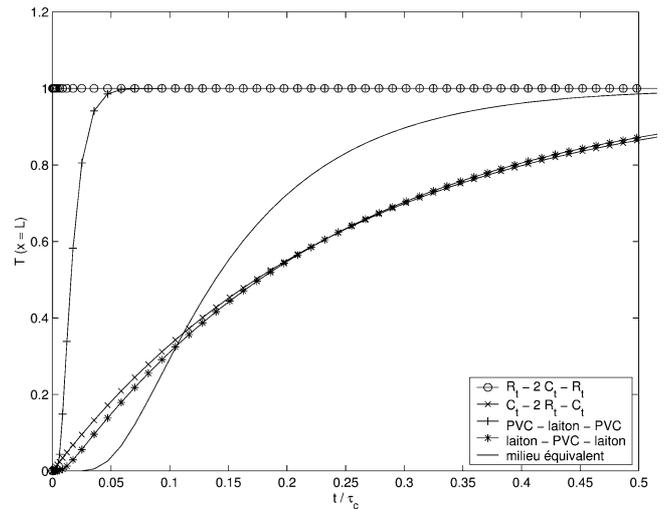


Fig. 5. Réponse en face arrière à un flash en face avant (milieux dégénérés et milieux réels en laiton et PVC).

l’équation de Fourier (c’est-à-dire pour $\alpha = 0$). Or la Fig. 5 montre les réponses en température sur la face $x = \ell$, lorsque la face $x = 0$ est soumise à un Dirac de flux (cas classique de la méthode “flash” pour la mesure de la diffusivité thermique de milieu homogène), pour le cas 1 (c’est-à-dire l’empilement $R_t - 2C_t - R_t$), le cas 2 (empilement $C_t - 2R_t - C_t$) et le cas du milieu homogène équivalent. On constate que pour les temps courts, la réponse des systèmes hétérogènes est plus “rapide” que celle du milieu homogène même si pour les temps longs on trouve que la réponse du système 2 est plus “lente” que celle du milieu homogène.

Nous avons également porté sur la Fig. 5 les réponses de milieux réels constitués de laiton et de PVC (le cas 3 est un sandwich PVC-laiton-PVC ; le cas 4 un sandwich laiton-PVC-laiton, voir Section 6) ; on constate strictement la même tendance, une montée en température plus rapide que le milieu homogène pour les temps courts. La représentation de Vernotte ne peut donner en aucun cas ce type de réponse : s’agissant d’observations en face arrière, la température prédite par le modèle de Vernotte est différée en début de processus par rapport à celle prédite par le modèle de Fourier à cause de la vitesse finie de propagation de la chaleur incluse dans ce modèle.

5.3. Autre approche simplifiée

La question est de savoir si l’on peut trouver une bonne approximation de $\lambda(t)$ et $\rho c(t)$. Pour obtenir une expression simple de l’équation de la chaleur, nous allons chercher des approximations de $\bar{a}(p)$ et $\bar{\lambda}(p)$.

Pour $\bar{a}(p)$, le comportement aux grandes valeurs de p étant le même dans tous les cas, nous avons choisi un approximant de Padé [1, 0] (pour $p \rightarrow \infty, \bar{a} \rightarrow \infty$). En ce qui concerne $\bar{\lambda}(p)$, le choix est plus difficile car le comportement aux p grands dépend de la configuration du système ; dans le cas 1, pour $p \rightarrow \infty, p\bar{\lambda}(p) \rightarrow 0$ et dans le cas 2, $p\bar{\lambda}(p) \rightarrow \infty$; on a donc choisi un approximant de

Padé [1,1] qui ne satisfait ni le cas 1 ni le cas 2 pour p grand puisque l'approximant de $p\bar{\lambda}(p)$ tend vers une valeur finie.

Après avoir développé $\bar{a}(p)$ et $\bar{\lambda}(p)$ en série entière (voir Annexe C) tout calcul fait, on obtient les approximants suivants :

$$\bar{a}(p) = a_0(1 + \alpha_1 p) \quad \text{avec} \quad (29)$$

$$\alpha_1 = \tau_c/12 \text{ dans les 2 cas}$$

et

$$\bar{\lambda}(p) = \frac{\lambda_0}{p} \left(\frac{1 + \alpha_2 p}{1 + \alpha_3 p} \right) \quad (30)$$

avec $\alpha_2 = \tau_c/10$, $\alpha_3 = 11\tau_c/60$ pour le cas 1 et $\alpha_2 = \tau_c/5$, $\alpha_3 = \tau_c/30$ pour le cas 2.

La Fig. 6 compare les réponses exactes et approchées (ainsi que la réponse du milieu homogène) pour la même configuration que la Fig. 5. Dans ce cas, la réponse est donnée par : $\bar{T} = 1/C$ avec ici

$$C = \frac{\lambda_0}{\sqrt{a_0}} \frac{1 + \alpha_2 p}{1 + \alpha_3 p} \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{1 + \alpha_1 p}} \sinh\left(\frac{\ell}{\sqrt{a_0}} \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{1 + \alpha_1 p}}\right)$$

Il peut être intéressant de retrouver l'équation de la chaleur correspondant à cette approximation, soit :

$$\frac{d^2 \bar{T}}{dx^2} = \frac{p}{a_0(1 + \alpha_1 p)} \bar{T}$$

et

$$\bar{\varphi} = -\lambda_0 \frac{1 + \alpha_2 p}{1 + \alpha_3 p} \frac{d\bar{T}}{dx}$$

soit après retour de Laplace :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \alpha_1 \frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial t} = \frac{1}{a_0} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (31)$$

et

$$\varphi + \alpha_3 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\lambda_0 \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t} \right) \quad (32)$$

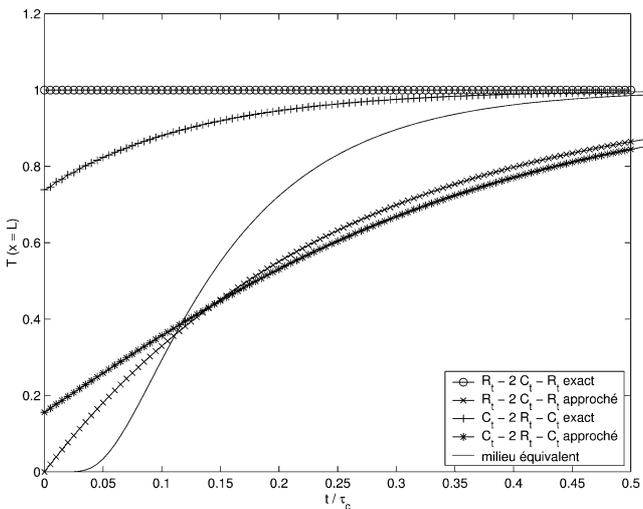


Fig. 6. Comparaison réponses exactes – réponses approchées (même configuration que pour la Fig. 5).

Ce système comporte 5 paramètres a_0 , λ_0 , α_1 , α_2 et α_3 au lieu de 3 comme dans l'approche classique.

5.4. Multi-matériaux

En appliquant les résultats du paragraphe 3, il est facile de voir comment évolue la réponse d'un empilement de n cellules unités dans le cas des milieux dégénérés.

Si l'on ramène l'échelle des temps au temps caractéristique de l'ensemble de l'empilement $\tau_{cn} = n^2 \tau_c$; il suffit de remplacer dans les α_i , τ_c par τ_{cn}/n^2 . Les Figs. 7(a) et (b) donnent les réponses impulsionnelles pour 2 et 4 cellules unités par le calcul exact et par le calcul approché pour les deux configurations.

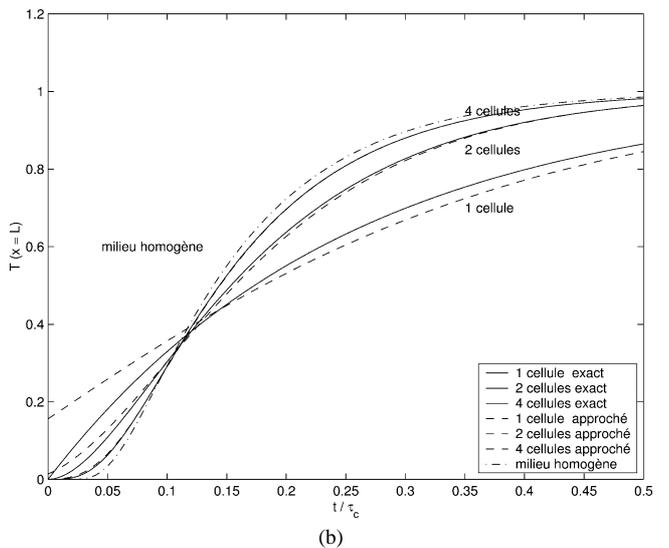
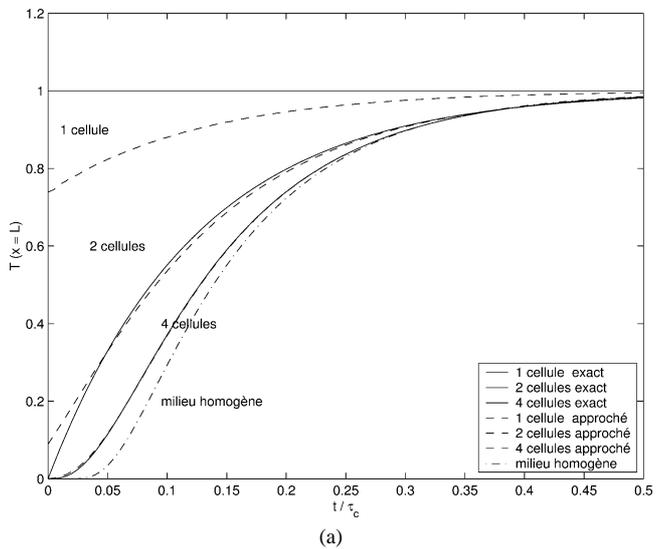


Fig. 7. Réponses impulsionnelles exactes et approchées pour les milieux dégénérés. (a) : $R_1 - 2C_1 - R_1$ et (b) : $C_1 - 2R_1 - C_1$.

6. Cas des milieux réels

On reprend les empilements qui nous ont déjà servi comme cas tests pour l'étude de «l'homogénéisation» des multicouches [2], soit :

- cas n° 1 : un tricouche PVC–laiton–PVC avec 1,5 mm d'épaisseur pour les couches de PVC et 10 mm pour la couche de laiton,
- cas n° 2 : un tricouche laiton–PVC–laiton avec 5 mm d'épaisseur pour les couches de laiton et 3 mm pour la couche de PVC,
- cas n° 3 : un empilement de 4 cellules du type PVC–laiton–PVC,
- cas n° 4 : un empilement de 4 cellules du type laiton–PVC–laiton,

(on a choisi : 0,15 W·m⁻¹·K⁻¹ pour la conductivité du PVC, 100 W·m⁻¹·K⁻¹ pour la conductivité du laiton, 10⁶ J·m⁻³·K⁻¹ pour la chaleur volumique du PVC, 4 × 10⁶ J·m⁻³·K⁻¹ pour la chaleur volumique du laiton).

Dans ce cas, les expressions de $\bar{a}(p)$ et $\bar{\lambda}(p)$ sont données par :

$$\bar{a} = \frac{p\ell^2}{\ln^2[A + \sqrt{A^2 - 1}]} \tag{33}$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\ell\sqrt{A^2 - 1}}{pB \ln[A + \sqrt{A^2 - 1}]} \tag{34}$$

où

$$A = \cosh\sqrt{pR_1C_1} \cosh\sqrt{pR_2C_2} + \frac{1}{2} \sinh\sqrt{pR_1C_1} \sinh\sqrt{pR_2C_2} \times \left[\sqrt{\frac{C_2R_1}{C_1R_2}} + \sqrt{\frac{C_1R_2}{C_2R_1}} \right]$$

$$B = \sinh\sqrt{pR_1C_1} \cosh\sqrt{pR_2C_2}/\sqrt{pC_1/R_1} + \frac{1}{2} [\cosh\sqrt{pR_1C_1} + 1] \sinh\sqrt{pR_2C_2}/\sqrt{pC_2/R_2} + \frac{1}{2} [\cosh\sqrt{pR_1C_1} - 1] \times \sinh\sqrt{pR_2C_2}/\sqrt{pC_2/R_2}/(pC_1/R_1)$$

dans lesquelles $R_1 = 2e_1/\lambda_1$ est la «résistance» du milieu 1 (première et troisième couche), $R_2 = 2e_2/\lambda_2$ la «résistance» du milieu 2 (deuxième couche), $C_1 = 2\rho c_1 e_1$ la «capacité» du milieu 1 (première et troisième couche), $C_2 = 2\rho c_2 e_2$ la «capacité» du milieu 2 (deuxième couche).

6.1. Approche simplifiée

Il s'agit de trouver les approximants de Padé pour $\bar{a}(p)$ et $\bar{\lambda}(p)$. Un code de calcul formel nous donne les développements suivants :

$$\bar{a}(p) = \frac{\ell^2}{\tau_c} \left[1 + \frac{1}{12} \frac{K^2}{\tau_c} p - \frac{1}{720} \frac{K^2}{\tau_c^2} H p^2 \right] \tag{35}$$

$$\bar{\lambda}(p) = \frac{\ell}{R_1 + R_2} \frac{1}{p} \times \left[1 + \frac{KI}{12} p - \frac{1}{720} \frac{K}{(R_1 + R_2)^2} J p^2 \right] \tag{36}$$

avec

$$\ell = 2(e_1 + e_2)$$

$$\tau_c = (R_1 + R_2)(C_1 + C_2)$$

$$K = R_2C_1 - R_1C_2$$

$$H = 3C_2^2R_1^2 + 3C_1^2R_2^2 + 12C_2R_1^2C_1 + 4R_1^2C_1^2 + 12C_2^2R_1R_2 + 34R_1C_1R_2C_2 + 12R_1C_1^2R_2 + 4R_2^2C_2^2 + 12C_1C_2R_2^2$$

$$I = (2R_2 + R_1)/(R_2 + R_1)$$

$$J = 11R_1^3C_2 + 7C_1R_1^3 + 34R_1^2R_2C_2 + 24C_1R_2R_1^2 + 36R_2^2C_2R_1 + 26C_1R_2^2R_1 + 8C_2R_2^3 + 4C_1R_2^3$$

soit les approximants :

$$\bar{a}(p) = a_0(1 + \alpha_1 p) \quad \text{avec } \alpha_1 = K^2/12\tau_c \tag{37}$$

$$\bar{\lambda}(p) = \frac{\lambda_0}{p} \frac{1 + \alpha_2 p}{1 + \alpha_3 p} \tag{38}$$

avec

$$\alpha_2 = \frac{J}{60(R_1 + R_2)(2R_2 + R_1)} + \frac{K}{12} \frac{(2R_2 + R_1)}{(R_2 + R_1)}$$

et

$$\alpha_3 = \frac{J}{60(R_1 + R_2)(2R_2 + R_1)}$$

Tous calculs faits on trouve :

- pour les cas 1 et 3 :

$$\alpha_1 = 61,66, \quad \alpha_2 = 86,63 \quad \text{et} \quad \alpha_3 = 153,6$$

- pour les cas 2 et 4 :

$$\alpha_1 = 61,66, \quad \alpha_2 = 164,22 \quad \text{et} \quad \alpha_3 = 31,37$$

On peut comparer ces résultats avec les milieux dégénérés :

- cas n° 1 :

$$\alpha_{1d} = 0,0833\tau_c, \quad \alpha_1 = 0,0713\tau_c$$

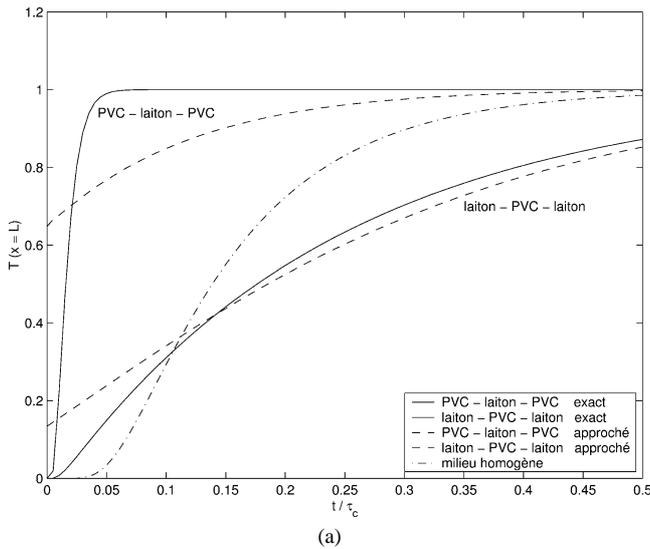
$$\alpha_{2d} = 0,1000\tau_c, \quad \alpha_2 = 0,1005\tau_c$$

$$\alpha_{3d} = 0,1833\tau_c, \quad \alpha_3 = 0,1780\tau_c$$

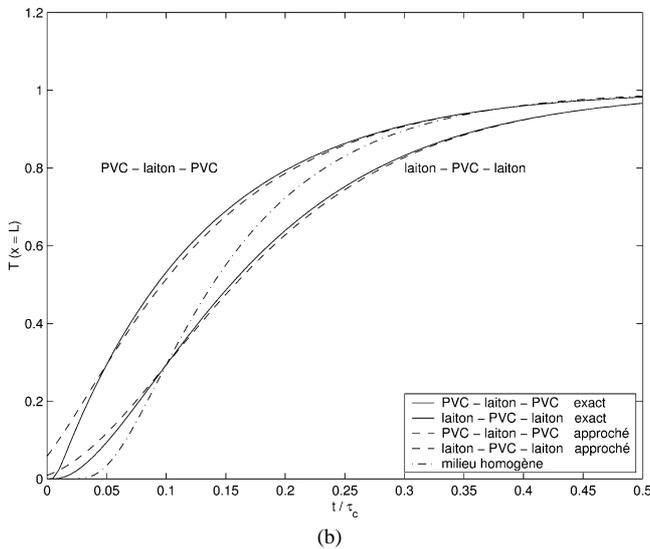
- cas n° 2 :

$$\alpha_{2d} = 0,2000\tau_c, \quad \alpha_2 = 0,1900\tau_c$$

$$\alpha_{3d} = 0,0333\tau_c, \quad \alpha_3 = 0,0363\tau_c$$



(a)



(b)

Fig. 8. Réponses impulsionnelles exactes et approchées d’assemblages laiton – PVC. (a) : 1 cellule et (b) : 2 cellules.

A titre d’exemple nous avons calculé les paramètres pour un matériau réel, un composite Kevlar–Epoxy défini par :

Epoxy :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0,08 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1} \\ \rho c_1 &= 1,25 \times 10^6 \text{ J}\cdot\text{m}^{-3}\cdot\text{K}^{-1} \\ e_1 &= 0,08 \times 10^{-3} \text{ m} \end{aligned}$$

Kevlar :

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= 1,40 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1} \\ \rho c_2 &= 1,43 \times 10^6 \text{ J}\cdot\text{m}^{-3}\cdot\text{K}^{-1} \\ e_2 &= 0,14 \times 10^{-3} \text{ m} \end{aligned}$$

Tout calcul fait on trouve :

– empilement n° 1 :

$$\alpha_1 = 0,028\tau_c, \quad \alpha_2 = 0,098\tau_c, \quad \alpha_3 = 0,150\tau_c$$

– empilement n° 2 :

$$\alpha_1 = 0,028\tau_c, \quad \alpha_2 = 0,148\tau_c, \quad \alpha_3 = 0,056\tau_c$$

6.2. Comparaisons des réponses impulsionnelles

Les Figs. 8(a) et (b) comparent les réponses impulsionnelles exactes et approchées dans les 4 cas des assemblages laiton–PVC. Comme on peut le voir, l’accord est très bon.

7. Cas général des systèmes non symétriques

Dans le cas de systèmes non symétriques, les coefficients A et D de la matrice de transfert associée sont différents ($A \neq D$) et la solution précédente ne peut convenir; il est donc nécessaire d’introduire une fonction supplémentaire.

7.1. Approche non locale

La forme proposée pour la matrice de transfert correspondant à un milieu non symétrique est suggérée par les quadripôles utilisés dans l’analyse des transferts convectifs monodirectionnels [11]. Toutefois dans le cas d’un transfert convectif, le quadripôle n’est pas passif, autrement dit le déterminant de la matrice de transfert n’est pas égal à l’unité, ce qui est nécessairement le cas pour un transfert diffusif. Il faut donc modifier simultanément la forme de la densité de flux de chaleur de manière à retrouver pour l’équation de la chaleur une forme analogue à (3).

On propose pour la densité de flux l’écriture suivante :

$$\begin{aligned} \varphi &= - \int_0^t \mathcal{K}(t - \tau) \frac{\partial T}{\partial t}(\tau) d\tau \\ &\quad - \int_0^t \lambda(t - \tau) \frac{\partial^2 T}{\partial t \partial x}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (39)$$

où $\mathcal{K}(t)$ est une fonction liée à une pseudo-vitesse de conduction et de généraliser le bilan d’énergie unidirectionnel sous la forme :

$$\begin{aligned} \int_0^t \rho c(t - \tau) \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}(\tau) d\tau + \int_0^t \mathcal{K}(t - \tau) \frac{\partial^2 T}{\partial t \partial x}(\tau) d\tau \\ = \int_0^t \mathcal{K}(t - \tau) \frac{\partial^2 T}{\partial t \partial x}(\tau) d\tau \\ + \int_0^t \lambda(t - \tau) \frac{\partial^3 T}{\partial t \partial x^2}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (40)$$

soit l’expression :

$$\int_0^t \rho c(t - \tau) \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}(\tau) d\tau = \int_0^t \lambda(t - \tau) \frac{\partial^3 T}{\partial t \partial x^2}(\tau) d\tau \quad (41)$$

Après transformation de Laplace sur le temps, on obtient :

$$\bar{\lambda}(p)p \frac{d^2 \bar{T}}{dx^2} = \bar{\rho c}(p)p^2 \bar{T}$$

que l'on peut écrire :

$$\begin{cases} \frac{d^2 \bar{T}}{dx^2} = \frac{p}{\bar{a}} \bar{T} & \text{avec } \bar{a} = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\rho c}} \\ \bar{\varphi} = -\bar{\mathcal{K}}(p)p \bar{T} - \bar{\lambda}(p)p \frac{d\bar{T}}{dx} \end{cases}$$

dont la solution sous forme matricielle (quadripôle) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \bar{T}_{x=0} \\ \bar{\varphi}_{x=0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{T}_{x=\ell} \\ \bar{\varphi}_{x=\ell} \end{pmatrix} \quad (42)$$

avec

$$E = \cosh(\alpha \ell) + \frac{\bar{\mathcal{K}}}{\bar{\lambda} \alpha} \sinh(\alpha \ell) \quad (43)$$

$$F = \frac{\sinh(\alpha \ell)}{p \bar{\lambda} \alpha} \quad (44)$$

$$G = p \bar{\lambda} \alpha \left[1 - \left(\frac{\bar{\mathcal{K}}}{\bar{\lambda} \alpha} \right)^2 \right] \sinh(\alpha \ell) \quad (45)$$

$$H = \cosh(\alpha \ell) - \frac{\bar{\mathcal{K}}}{\bar{\lambda} \alpha} \sinh(\alpha \ell) \quad (46)$$

et $\alpha^2 = p/\bar{a}$. Il est facile de montrer que la forme de la matrice de transfert précédente est conservée pour l'empilement de n cellules unités identiques (voir Annexe B).

Pour déterminer alors les propriétés du milieu équivalent, il suffit maintenant d'identifier terme à terme ; dans le cas général, on obtient :

$$\bar{a} = \frac{p \ell^2}{\ln^2 \left[\frac{A+D}{2} + \sqrt{\left(\frac{A+D}{2} \right)^2 - 1} \right]} \quad (47)$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\ell}{pB} \frac{\sqrt{\left(\frac{A+D}{2} \right)^2 - 1}}{\ln \left[\frac{A+D}{2} + \sqrt{\left(\frac{A+D}{2} \right)^2 - 1} \right]} \quad (48)$$

et

$$\bar{\mathcal{K}} = \frac{A - D}{2pB} \quad (49)$$

et par suite :

$$\bar{\rho c} = \frac{\ln \left[\frac{A+D}{2} + \sqrt{\left(\frac{A+D}{2} \right)^2 - 1} \right] \sqrt{\left(\frac{A+D}{2} \right)^2 - 1}}{\ell p^2 B} \quad (50)$$

L'énergie du milieu non local est maintenant donnée par comparaison entre les relation (5) et (40) par

$$\mathcal{E} = \int_0^t \left[\rho c(t - \tau) \frac{\partial T}{\partial t}(\tau) + \mathcal{K}(t - \tau) \frac{\partial T}{\partial x}(\tau) \right] d\tau \quad (51)$$

7.2. Cas particuliers des milieux dégénérés

A titre d'exemple, nous appliquons les résultats précédents à deux bicouches dégénérés constitués d'un isolant léger caractérisé par une résistance thermique ($2R_t$) et d'un conducteur lourd caractérisé par une capacité thermique ($2C_t$). Dans le premier cas, la résistance est en milieu 1 ; dans le deuxième cas, la capacité est en milieu 1 ; d'où les matrices de transfert :

– cas n° 1 :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 2R_t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2C_t p & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + 4R_t C_t p & 2R_t \\ 2C_t p & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (52)$$

– cas n° 2 :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2C_t p & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2R_t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2R_t \\ 2C_t p & 1 + 4R_t C_t p \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (53)$$

En introduisant le temps caractéristique $\tau_c = 4R_t C_t$, on obtient :

$$\bar{a} = \frac{p \ell^2}{\ln^2 \left[1 + \frac{\tau_c}{2} p + \sqrt{\left(1 + \frac{\tau_c}{2} p \right)^2 - 1} \right]} \quad (54)$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\ell}{2R_t} \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{\tau_c}{2} p \right)^2 - 1}}{p \ln \left[1 + \frac{\tau_c}{2} p + \sqrt{\left(1 + \frac{\tau_c}{2} p \right)^2 - 1} \right]} \quad (55)$$

$$\bar{\mathcal{K}} = C_t \quad (\text{cas n° 1}), \quad \bar{\mathcal{K}} = -C_t \quad (\text{cas n° 2}) \quad (56)$$

et par suite :

$$\bar{\rho c} = \frac{\ln \left[1 + \frac{\tau_c}{2} p + \sqrt{\left(1 + \frac{\tau_c}{2} p \right)^2 - 1} \right] \sqrt{\left(1 + \frac{\tau_c}{2} p \right)^2 - 1}}{2 \ell p^2 R_t} \quad (57)$$

Les Figs. 9 et 10 montrent les variations de $\lambda(t)$ et $\rho c(t)$. Pour $\mathcal{K}(t)$ on trouve un Dirac (positif pour le cas n° 1 et négatif pour le cas n° 2). Dans ce cas l'énergie \mathcal{E} du milieu est donnée par la relation (51) vaut

$$\mathcal{E} = \int_0^t \rho c(t - \tau) \frac{\partial T}{\partial t}(\tau) d\tau \pm C_t \frac{\partial T}{\partial x}(t)$$

La relation précédente n'est pas exacte localement pour le milieu réel mais seulement en moyenne sur une cellule-unité $0 < x < \ell$. En posant $\langle \cdot \rangle = 1/\ell \int_0^\ell \cdot dx$, il vient :

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \int_0^t \rho c(t - \tau) \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t}(\tau) d\tau \pm C_t (T_{x=\ell} - T_{x=0})(t)$$

La signification du second terme apparaît clairement sous cette dernière forme. L'énergie de la cellule unité dégénérée

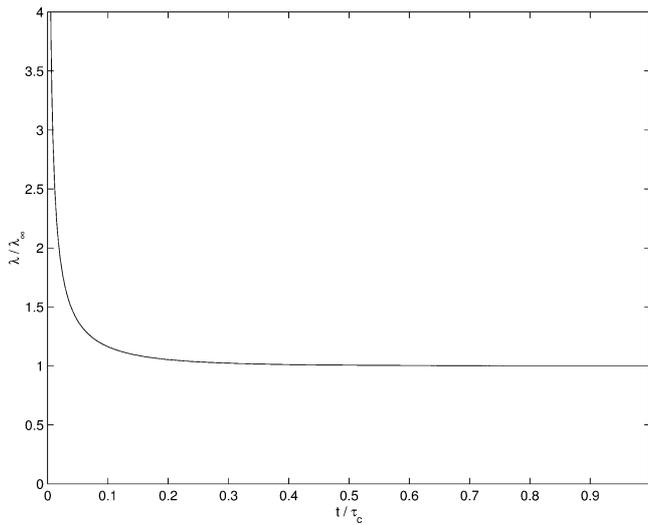


Fig. 9. Conductivité thermique volumique d'un milieu bicouche dégénéré non symétrique.

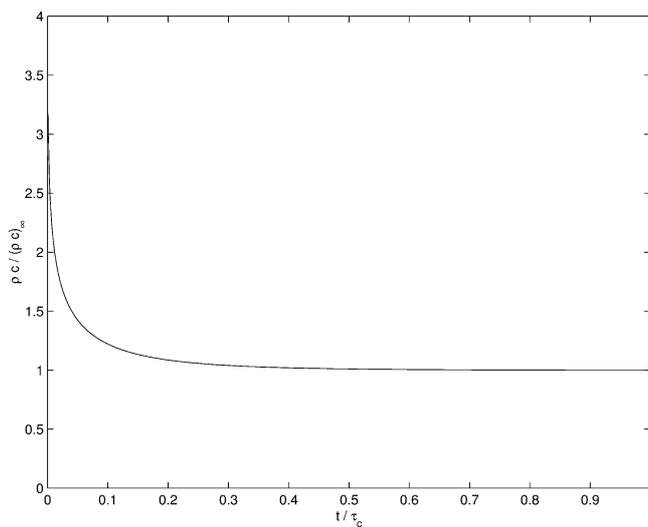


Fig. 10. Chaleur volumique d'un milieu bicouche dégénéré non symétrique.

est contenue uniquement dans la capacité thermique et ne dépend pas de la température moyenne $\langle T \rangle$ de la cellule mais seulement de la température de l'extrémité $x = 0$ ou $x = \ell$ en contact avec la capacité. Par exemple, en régime permanent où $\langle T \rangle = (T_{x=0} + T_{x=\ell})/2$, $\langle \mathcal{E} \rangle = 2C_t \langle T \rangle \pm C_t(T_{x=\ell} - T_{x=0}) = 2C_t T_{x=0}$ (cas n° 2) ou $2C_t T_{x=\ell}$ (cas n° 1) suivant l'extrémité en contact avec la capacité.

8. Conclusion

Nous avons proposé une écriture générale de la loi de comportement reliant la densité de flux thermique et la

température pour le cas d'un système hétérogène et pour un transfert unidirectionnel :

$$\varphi = - \int_0^t \mathcal{K}(t - \tau) \frac{\partial T}{\partial t}(\tau) d\tau - \int_0^t \lambda(t - \tau) \frac{\partial^2 T}{\partial t \partial x}(\tau) d\tau$$

L'équation du bilan thermique s'écrit alors :

$$\int_0^t \rho c(t - \tau) \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}(\tau) d\tau = \int_0^t \lambda(t - \tau) \frac{\partial^3 T}{\partial t \partial x^2}(\tau) d\tau$$

où $\rho c(t)$, $\mathcal{K}(t)$ et $\lambda(t)$ sont des fonctions dépendant des matériaux et de la structure du système.

Nous avons également montré que dans le cas de systèmes symétriques, on pouvait obtenir une équation de la chaleur approchée sous la forme :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \alpha_1 \frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial t} = \frac{1}{a_0} \frac{\partial T}{\partial t}$$

avec le flux donné par :

$$\varphi + \alpha_3 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\lambda_0 \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t} \right)$$

où α_1 , α_2 , α_3 sont 3 constantes caractéristiques de la structure du milieu hétérogène.

Enfin nous avons également montré que l'équation de Vernotte (ou équation hyperbolique) appliquée à un milieu homogène unidirectionnel ne peut en aucun cas décrire le comportement en diffusion de systèmes hétérogènes comme des murs multicouches.

Annexe A

$$A_1 = D_1 = \cosh \sqrt{\frac{pe_1^2}{a_1}}$$

$$B_1 = \sinh \sqrt{\frac{pe_1^2}{a_1}} / \lambda_1 \sqrt{\frac{p}{a_1}}$$

$$C_1 = \lambda_1 \sqrt{\frac{p}{a_1}} \sinh \sqrt{\frac{pe_1^2}{a_1}}$$

$$A_2 = D_2 = \cosh \sqrt{\frac{p4e_2^2}{a_2}}$$

$$B_2 = \sinh \sqrt{\frac{p4e_2^2}{a_2}} / \lambda_2 \sqrt{\frac{p}{a_2}}$$

$$C_2 = \lambda_2 \sqrt{\frac{p}{a_2}} \sinh \sqrt{\frac{p4e_2^2}{a_2}}$$

$$A = \cosh b_1 \cosh b_2$$

$$+ \frac{1}{2} \sinh b_1 \sinh b_2 \left(\frac{c_2}{c_1} + \frac{c_1}{c_2} \right)$$

$$B = \frac{1}{c_1} \sinh b_1 \cosh b_2$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2c_2} (\cosh b_1 + 1) \sinh b_2 \\
& + \frac{c_2}{2c_1^2} (\cosh b_1 - 1) \sinh b_2 \\
C = & c_1 \sinh b_1 \cosh b_2 \\
& + \frac{c_2}{2} (\cosh b_1 + 1) \sinh b_2 \\
& + \frac{c_1^2}{2c_2} (\cosh b_1 - 1) \sinh b_2
\end{aligned}$$

où

$$b_1 = \sqrt{\frac{p}{a_1}} 2e_1, \quad b_2 = \sqrt{\frac{p}{a_2}} 2e_2$$

$$c_1 = \lambda_1 \sqrt{\frac{p}{a_1}}, \quad c_2 = \lambda_2 \sqrt{\frac{p}{a_2}}$$

Annexe B

On utilise les propriétés suivantes :

$$\begin{pmatrix} \cosh X & Y \sinh X \\ \sinh X/Y & \cosh X \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cosh(nX) & Y \sinh(nX) \\ \sinh(nX)/Y & \cosh(nX) \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \cosh X + Z \sinh X & Y \sinh X \\ (1 - Z^2) \sinh X/Y & \cosh X - Z \sinh X \end{pmatrix}^n \\
& = \begin{pmatrix} \cosh(nX) + Z \sinh(nX) & Y \sinh(nX) \\ (1 - Z^2) \sinh(nX)/Y & \cosh(nX) - Z \sinh(nX) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Annexe C

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\left(1 + \frac{\tau_c}{2} p\right)^2 - 1} \\
& \simeq \sqrt{p\tau_c} \left(1 + \frac{p\tau_c}{8} - \frac{p^2\tau_c^2}{128} + \frac{p^3\tau_c^3}{1024} - \frac{5}{32768} p^4\tau_c^4 + \dots\right) \\
& \ln \left[1 + \frac{\tau_c}{2} p + \sqrt{\left(1 + \frac{\tau_c}{2} p\right)^2 - 1}\right] \\
& \simeq \sqrt{p\tau_c} \left(1 - \frac{p\tau_c}{24} + \frac{3p^2\tau_c^2}{640} - \frac{5}{7168} p^3\tau_c^3 + \dots\right)
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\bar{a}(p) & \simeq \frac{\ell^2}{\tau_c} \left(1 + \frac{p\tau_c}{12} - \frac{p^2\tau_c^2}{240} + \dots\right) \\
\bar{\lambda} & \simeq \frac{\lambda_0}{p} \left(1 - \frac{p\tau_c}{12} + \frac{11p^2\tau_c^2}{720} + \dots\right) \quad \text{cas 1} \\
\bar{\lambda} & \simeq \frac{\lambda_0}{p} \left(1 + \frac{p\tau_c}{6} - \frac{p^2\tau_c^2}{180} + \dots\right) \quad \text{cas 2}
\end{aligned}$$

Références

- [1] P. Vernotte, La véritable équation de la chaleur, C. R. Hebd. Séances Acad. Sci. Paris 247 (23) (1958) 2103–2105.
- [2] M.C. Cattaneo, Sur une forme de l'équation de la chaleur éliminant le paradoxe d'une propagation instantanée, C. R. Hebd. Séances Acad. Sci. Paris 247 (4) (1958) 431–433.
- [3] S. Volz, M. Lallemand, J.B. Saulnier, Analyse de la conduction de la chaleur aux temps ultra-courts dans un solide par la thermodynamique irréversible étendue et la dynamique moléculaire, Rev. Gén. Therm. 36 (1997) 826–835.
- [4] A. Degiovanni, Systèmes multicouches : problèmes liés à l'homogénéisation des caractéristiques thermiques, Rev. Gén. Therm. 339 (1990) 117–128.
- [5] A.V. Luikov, Application of irreversible thermodynamics methods to investigation of heat and mass transfer, Internat. J. Heat Mass Transfer 9 (1966) 139–152.
- [6] Y. Lescanne, C. Moyne, P. Perré, Diffusion mechanisms in a sheet of paper, in: A.S. Mujumdar (Ed.), Drying '92, Elsevier, Amsterdam, 1992, pp. 1017–1026.
- [7] M. Quintard, S. Whitaker, One- and two-equation models for transient diffusion processes in two-phase systems, Adv. Heat Transfer 23 (1993) 369–464.
- [8] C. Moyne, Two-equation model for a diffusive process in porous media using the volume averaging method with an unsteady-state closure, Adv. Water Resour. 20 (2–3) (1997) 63–76.
- [9] W. Kaminski, Hyperbolic heat conduction equation for materials with a non homogeneous inner structure, J. Heat Transfer 112 (1990) 555–560.
- [10] A. Degiovanni, Conduction dans un « mur » multicouche avec sources : extension de la notion de quadripôles, Internat. J. Heat Mass Transfer 31 (3) (1988) 553–557.
- [11] S. André, J.C. Batsale, A. Degiovanni, D. Maillet, C. Moyne, Thermal Quadrupoles : Solving the Heat Equation Through Integral Transforms, Wiley, New York, 2000.
- [12] S.L. Sobolev, Equations of transfer in non-local media, Internat. J. Heat Mass Transfer 37 (14) (1994) 2175–2182.
- [13] J.C. Maxwell, On the dynamic theory of gases, Philos. Trans. Roy. Soc. 157 (1867) 49–88.
- [14] M. Morse, H. Feshbach, Methods of Theoretical Physics, McGraw-Hill, New York, 1953, p. 865.
- [15] P. Duhamel, A new finite integral transform pair for hyperbolic conduction problems in heterogeneous media, Internat. J. Heat Mass Transfer 44 (2001) 3307–3320.